

Genera spectra: genera Euler-Fokker produzidos a partir de mapeamentos espectrais

MODALIDADE: COMUNICAÇÃO

SUBÁREA: Composição e Sonologia

Angelo Ceccatto

Universidade Federal do Rio de Janeiro

angelo.ceccatto@musica.ufrj.br

Resumo. Este trabalho investiga o processo de geração de escalas microtonais, denominadas *genera spectra*, construídas ao integrarmos princípios da música espectral e do sistema teórico do *genus* Euler-Fokker. O ponto de partida é a leitura espectralista do timbre sonoro como matéria-prima composicional, através da análise de espectros gerados via Transformação Rápida de Fourier (FFT), que então atravessamos com a leitura da entonação justa como coleção de relações advindas da série harmônica. Então introduzimos o *genus* Euler-Fokker como uma ferramenta mediadora, capaz de prover uma ponte entre as informações extraídas da série harmônica e uma ou mais coleções em entonação justa. O procedimento consiste em analisar um excerto sonoro, por exemplo, uma nota de um trombone, e extrair seu conjunto de harmônicos mais intensos, definindo a cardinalidade deste agrupamento como “resolução” espectral. A partir desse conjunto, propomos duas abordagens para construir o *genus*: a primeira trata da fatoração dos constituintes primos do conjunto extraído do espectro, seguindo a lógica histórica do sistema Euler-Fokker; e a segunda, mais direta, utiliza os próprios números harmônicos como fatores geradores. Os resultados demonstram que o processo viabiliza o mapeamento de certas características acústicas, e a classificação desses novos conjuntos por propriedades estruturais (como o limite-23). Concluímos que esta metodologia estabelece um mecanismo formal e operacional para transpor a organização física do som para o modelo matemático da entonação justa.

Palavras-chave. Música espectral, *Genus* Euler-Fokker, Análise espectral, Microtonalidade, Entonação justa

Genera Spectra: Euler-Fokker Genera produced through spectral mapping

Abstract. This paper investigates the process of generating microtonal scales, referred to as *genera spectra*, which are constructed by integrating principles from spectral music with the theoretical system of the Euler-Fokker *genus*. The starting point is a spectrographic analysis of sound timbre, treating it as compositional raw material. This is achieved through analyzing spectra generated via Fast Fourier Transform (FFT), which we subsequently process using the framework of just intonation, viewing it as a collection of relationships derived from the harmonic series. We then introduce the Euler-Fokker *genus* as a mediating tool, capable of bridging the information extracted from the harmonic series to one or more just intonation collections. The procedure involves analyzing an audio excerpt, for instance, a note played on a trombone, and extracting its most intense set of harmonics, defining the cardinality of this grouping as ‘spectral resolution.’ From this resulting set, we propose two approaches for constructing the *genus*: the first addresses the prime factorization of the constituents extracted from the spectrum, following the historical logic of the Euler-Fokker system; and the second, more direct approach, utilizes the harmonic numbers themselves as generating factors. The results demonstrate that this process facilitates mapping specific acoustic characteristics and enables the classification of these new sets based on structural

properties (such as limit-23). We conclude that this methodology establishes a formal and operational mechanism for transposing the physical organization of sound into the mathematical model of just intonation.

Keywords. Spectral Music, Euler-Fokker *Genus*, Spectral Analysis, Microtonality, Just Intonation.

Introdução

A composição assistida por computador foi uma das grandes transformações da prática musical na segunda metade do século XX. Institutos de pesquisa como o IRCAM (*Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique*) foram pioneiros no desenvolvimento de muitos dos recursos computacionais utilizados de forma abrangente na composição musical contemporânea. Dentre suas contribuições, recursos para análise de espectros gerados pela Transformação Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) viabilizaram que pesquisadores sonólogos e compositores passassem a utilizar mais intensamente os parâmetros do timbre como ferramenta de arte-pesquisa. Essa exploração e reflexão sobre o som foi um dos motivadores do movimento estético que hoje é conhecido como “música espectral”, “corrente espectral” ou “espectralismo”.

Dentre as transformações trazidas pela música espectral, a transição para uma epistemologia da música baseada no som-em-si e seus atributos foi a mais notável. Por outro lado, escalas articuladas fazendo uso de proporções em vez de distâncias discretas também foram exploradas como reflexão de uma realidade acústica. Dentre as tentativas de medição qualitativa dessas relações, temos a “harmonicidade” de Clarence Barlow (1987), a distância harmônica de James Tenney (2017), e o *gradus suavitatis* de Leonhard Euler (Smith, 1960). Euler, no mesmo trabalho, propôs um novo modo de gerar e entender escalas a partir dos graus da série harmônica, o *genus musicum*, que foi posteriormente revisado e expandido por Adriaan Fokker em 1945 (Fokker, 1975). Essa configuração revisada viria a ser denominada comumente de “*genus Euler-Fokker*”.

Esse trabalho é uma investigação inicial sobre a utilização de espectros sonoros como fonte para a geração de escalas microtonais, aqui denominadas ***genera spectra***.¹ Esse processo será mediado pela criação de *genera Euler-Fokker* a partir dos harmônicos mais fortes de um espectro, cuja cardinalidade entenderemos como “resolução”. Buscaremos delimitar o funcionamento desse procedimento e discutir as aproximações entre a música espectral e a

¹ “Gêneros espectrais” ou “qualidades escalares espectrais”

entonação justa, tomando o *genus* Euler–Fokker como um ponto de mediação entre organização espectral e organização escalar.

Música espectral

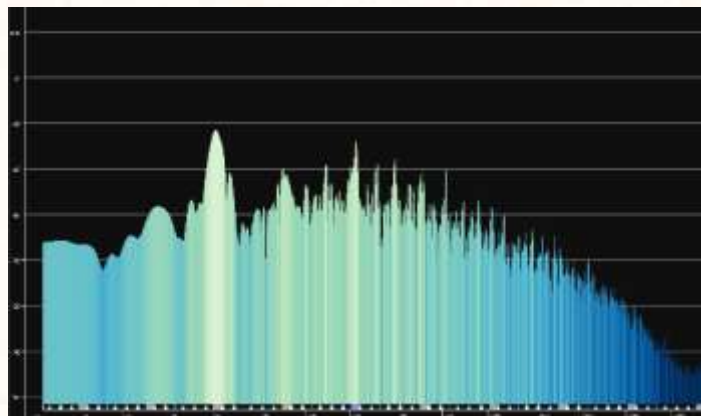
A música espectral (*musique spectrale*), termo cunhado por Hughes Dufourt (1943) em 1979 (*apud* Anderson, 2001), surgiu na França em meados dos anos 70, inspirada pelo desenvolvimento, então recente, de ferramentas computacionais de síntese e análise sonora. Teve como seus expoentes mais proeminentes Gérard Grisey e Tristan Murail, associados ao grupo *Ensemble L'Itineraire*, grupo fundado em 1973, e responsável por estreitar diversas peças da corrente espectral, como *Partiels*, de Grisey, *Memóire-érosion*, de Murail, *Clair-obscur* de Tessier e *Saturne* de Dufourt (Cagney, 2024). Foi marcada pela transformação de paradigma que mudou o foco dos elementos constituintes da composição das sucessões intervalares para o timbre e suas propriedades, cuja linguagem harmônica passou a dialogar com conceitos como “harmonicidade”, “inarmenicidade” e “subharmenicidade” (Rose, 1996).² Essa preocupação com o timbre levou os compositores da época a procurar materiais composicionais dentro dos componentes físicos constituintes do timbre: os parciais³ do som viraram sujeito de investigação e inspiração musical através do recurso da análise espectral.

Para averiguar um espectro sonoro (Figura 1), faz-se uso da Transformação de Fourier, teorizada pela primeira vez em 1822 por Joseph Fourier. Essa transformação converte uma onda sonora periódica em uma soma de ondas seno cujas frequências podem ser múltiplos inteiros de uma fundamental, gerando um espectro harmônico ou inarmônico (Fineberg, 2000). A análise espectral pode ser realizada por diferentes ferramentas, como o algoritmo *sigmund~*, de Miller Puckette (2007), o software *Sonic Visualiser*, ou um sonógrafo, que produz projeções impressas do espectro sonoro. Foi por meio de um sonógrafo que Grisey realizou a análise espectrográfica de um E₁ pedal (41.2 Hz) de um trombone na composição da obra *Partiels* (1975). Após anotar as frequências constituintes, ele as orquestrou para um grupo de câmara, replicando os parciais do instrumento, e fazendo transformações nesse “espectro orquestral”. Esse recurso inspirado na síntese aditiva veio a ser denominado, metaforicamente, de “síntese aditiva orquestral” (Rose, 1996).

² “*harmonicity*”, “*inharmonicity*” e “*subharmonicity*”

³ Aqui, tratamos como diferentes os termos “parcial” e “harmônico”. Onde parcial se refere aos elementos constituintes de um som, harmônicos ou inarmônicos, e harmônico se refere à frequência resultante da multiplicação da fundamental de um som e um número inteiro.

Figura 1. Espectro sonoro gerado utilizando o software *Sonic Visualiser*. No eixo x temos a medida das frequências em Hertz (Hz). No eixo y, a amplitude em decibéis (dB).



Fonte: Autor

Enquanto inicialmente, as técnicas espectralistas de manipulação do som tinham como inspiração recursos computacionais de síntese sonora, compositores também fizeram uso do timbre para realizar a geração de “reservatórios” (Fineberg, 2000), cuja origem espectral viabiliza a geração de uma grande quantidade de alturas sem a perda de coerência. Essa utilização do espectro sonoro foi classificada por Teodorescu-Ciocanea (2003) como “Espectralismo e Modalidade” (*Spectralism and Modality*), que cita como exemplo Calin Ioachimescu, que fez uso de “micro-modos” deduzidos da série harmônica na composição musical.⁴

Entonação justa

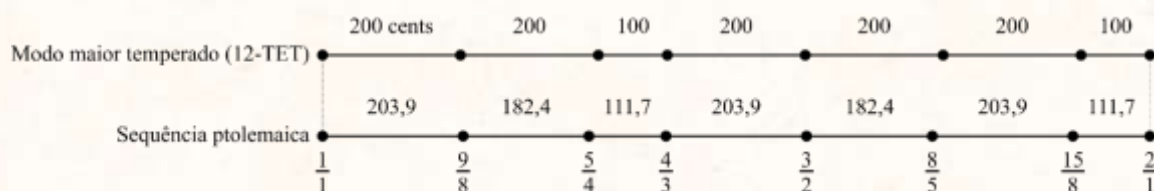
A aplicação dos parciais harmônicos de um espectro como fonte para a geração de coleções de alturas dialoga com um padrão na história da música, no qual determinadas escalas são construídas a partir de relações que espelham intervalos da série harmônica. Dentre as mais simples dessas, temos a escala pitagórica, construída a partir do empilhamento de quintas justas representadas pela relação de frequências 3: 2, que podemos entender como sendo extraídas da

⁴ Embora essa abordagem esteja inserida no contexto do espectralismo, a relação entre espectro sonoro e organização das alturas também foi investigada sob outras perspectivas. Entre elas, destaca-se o trabalho de Sethares (2005), que propõe uma correspondência entre timbre e sistemas de afinação. Em sua teoria, diferentes distribuições espectrais favorecem diferentes conjuntos intervalares, de modo que uma escala pode ser construída ou adaptada para apresentar maior compatibilidade com o espectro de um determinado som que venha a reproduzir a escala gerada.

relação do terceiro grau da série harmônica com o segundo.⁵ Outras escalas produzidas através do relacionamento de frequências são:

a) a diatônica tensa (*syntonon diatonon*) de Ptolemeu (Ptolemeu, 2000), construída através do empilhamento de dois *genera* diatônicos, disjuntos por um tom. Sua versão reorganizada a partir de C foi rebatizada por Harry Partch como “sequência ptolemaica” (Partch, 1974). Consiste na coleção de proporções 1: 1, 9: 8, 5: 4, 4: 3, 3: 2, 5: 3, 15: 8, as quais são refletidas com relativa precisão pelo modo maior do sistema tonal temperado (Figura 2).

Figura 2. Comparação entre a sequência ptolemaica e o modo maior na afinação 12-TET (*Tone equal temperament*) em cents



Fonte: Autor

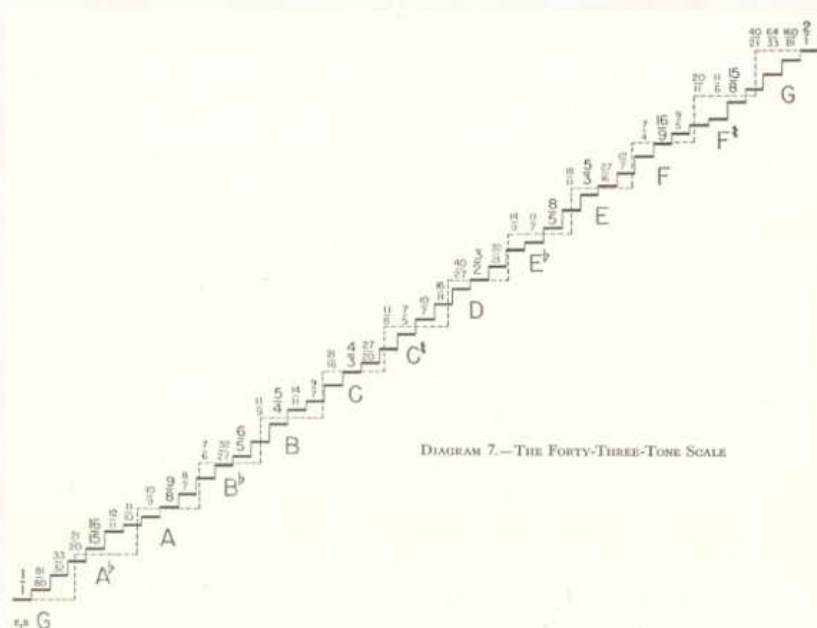
b) A escala cromática de 43 alturas de Harry Partch, publicada pela primeira vez em 1949 no texto *Genesis of a Music* (Partch, 1974). Essa escala foi construída buscando uma aplicação do limite-11,⁶ isso é, fazendo uso dos intervalos disponibilizados pelo harmônico 11 e seus múltiplos (Figura 3).

c) A afinação da peça *Hyperchromatica*, de Kyle Gann, idealizada pelo mesmo (Gann, 2019). A escala parte de uma série harmônica de $E \cong$, do oitavo ao décimo quinto harmônico, formando oito notas cujas razões correspondem aos números ímpares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. Nessa afinação “8 × 8”, cada um desses números é multiplicado por todos os outros, gerando 64 combinações, cada uma representando uma nova razão em relação a $E \cong$. Como algumas multiplicações coincidem (por exemplo, $3 \times 5 = 15 \times 1$), sobram apenas 33 alturas distintas, que então são ajustadas para oitava e dispostas numa escala.

⁵ O termo “entonação justa” (*just intonation*, doravante EJ) será utilizado nesse texto para denominar a representação de relações entre alturas utilizando proporções de números inteiros, compatível com a utilização de Gann (2019). Discussões sobre a delimitação da utilização de números considerados “baixos” e “altos” na definição de entonação justa estão fora do escopo de discussão desse artigo.

⁶ “Limite”, ou “limite primo”, conceito também originado por Partch, faz referência ao harmônico primo mais alto presente na fatoração dos inteiros de uma determinada proporção. Por exemplo, se tivermos as proporções: a) 10: 9, e b) 4: 3, temos que a proporção a) é de limite-5, pois têm presente na fatoração de seus elementos ($\frac{5 \times 2}{3 \times 3}$) o número primo 5 como primo mais alto, enquanto a proporção b) ($\frac{2 \times 2}{3}$) tem como primo mais alto o número 3, a caracterizando como de limite-3.

Figura 3. Escala cromática de 43 notas de Harry Partch. Os intervalos, representados em proporções, são acompanhados por sua equivalência aproximada com as 12 notas da escala 12-TET



Fonte: Partch (1979)

Quadro 1. Tabela de geração 8×8 do sistema de afinação utilizado por Gann em *Hyperchromatica*. Em verde, os harmônicos selecionados. Em vermelho, as multiplicações repetidas

	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9	15	21	27	33	39	45
5	5	15	25	35	45	55	65	75
7	7	21	35	49	63	77	91	105
9	9	27	45	63	81	99	117	135
11	11	33	55	77	99	121	143	165
13	13	39	65	91	117	143	169	195
15	15	45	75	105	135	165	195	225

Fonte: Autor

Genera Euler-Fokker

No século 18, inspirado pelas estruturas tetracordais gregas denominadas *genera*,⁷ Leonhard Euler (1707—1783) propôs um procedimento para geração de sistemas de afinação

⁷ “*Genera*” (plural de *genus*) originalmente se refere às diferentes qualidades de divisão tetracordal de uma quarta na Grécia antiga. Esses tetracordes, ou *genus*, podiam ser classificados como “enarmônico”, “diatônico” ou “cromático”. Eram articulados um com o outro de forma conjunta ou disjunta (com o intervalo de um tom) para

denominado “*genus musical*” (*genus musicum*) (Smith, 1960). Um *genus* de Euler consiste em uma escala na qual todos os valores são divisores de um número inteiro, ajustados para oitava, que podem ser utilizados na composição musical, ou para representar conjuntos já estabelecidos. Esse número inteiro é fatorado por números primos, e cada primo (2, 3, 5, 7, ...) representa um intervalo específico, ou seja: o primo 2 representa o intervalo de oitava; o 3 expressa o intervalo de quinta; o 5 expressa o intervalo de terça maior, e o 7 expressa o intervalo de sétima menor; e assim por diante.⁸ Por exemplo, se tivermos a expressão $n \cdot 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, onde n é uma frequência fundamental qualquer, e tivermos $a = 2$ e $b = 1$, e $c = 2$, teremos $n \cdot (2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2) = n \cdot (4 \cdot 3 \cdot 25) = n \cdot 300$, na qual todos os divisores de 300 (que Euler chamou de “expoente”) podem ser utilizados para o cálculo dessas frequências. Vejamos que o número de notas gerada por esse *genus* será dado pelo cálculo. Então essas frequências são ajustadas por oitava, isso é, multiplicadas por 2^n , até que suas proporções estejam entre 1:1 e 2:1.⁹ Posteriormente essas frequências são simplificadas (Quadro 2), e as redundâncias excluídas (Quadro 3).

Quadro 2. Demonstração da conversão das proporções geradas pelos divisores de 300 em proporções EJ simplificadas

Divisores de 300	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	25	30	50	60	75	100	150	300
Proporções EJ ajustadas por oitava	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{30}{16}$	$\frac{50}{32}$	$\frac{60}{32}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{100}{64}$	$\frac{150}{128}$	$\frac{300}{256}$
Proporções EJ simplificadas	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{75}{64}$

Fonte: Autor

Quadro 3. *Genus* após exclusão de redundâncias

Conjunto do <i>genus</i> $n \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, com redundâncias excluídas	$\frac{1}{1}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{15}{8}$
--	---------------	-----------------	---------------	---------------	-----------------	----------------

Fonte: Autor

formar o Sistema Perfeito Superior (*greater perfect system*) grego (Barker, 1989). Euler decidiu pelo uso do termo “*genus*” pois afirmava que, assim como a quarta era dividida nos *genera* gregos, a oitava seria a nova estrutura a ser dividida. (Smith, 1960)

⁸ É importante considerar que esses intervalos não são os mesmos da escala de temperamento igual dividido em doze partes, cuja razão entre os elementos contíguos é $2^{\frac{1}{12}}$.

⁹ Na expressão mais comum dos *genera* de Euler, o expoente do fator 2 é mantido como genérico, ou seja, o *genus* expresso estaria posto como $2^m \cdot 3^1 \cdot 5^2$, onde m é qualquer fator necessário para mudança de oitava.

O número de notas de um *genus*, contando redundâncias de oitava, pode ser calculado, por exemplo, para o *genus* supracitado, com: $C = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$, que, para, $a = 2$, $b = 1$ e $c = 2$, teremos $(2 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 18$ como resultado. Excluindo as redundâncias de oitava (ou seja, utilizando apenas b e c), teremos $(b + 1)(c + 1) = (1 + 1)(2 + 1) = 6$.

Notavelmente, Euler trabalhou com números primos até 7, gerando *genera* que classificava por complexidade. Entre os mais notáveis, temos o *Genus I* (2^m), o mais simples, que gera apenas intervalos de oitava; o *Genus IV* ($2^m \cdot 3^2$), o *genus* de Mercúrio, utilizado na Grécia Antiga, e o *Genus XVIII* ($2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$), chamado de *genus* diatônico-cromático, que, para Euler, é o *genus* que melhor reflete o sistema de afinação da música atual (Figura 4).

Figura 4. Listagem de alturas em tons, proporções e nomes de intervalos do *genus* diatônico-cromático de Euler

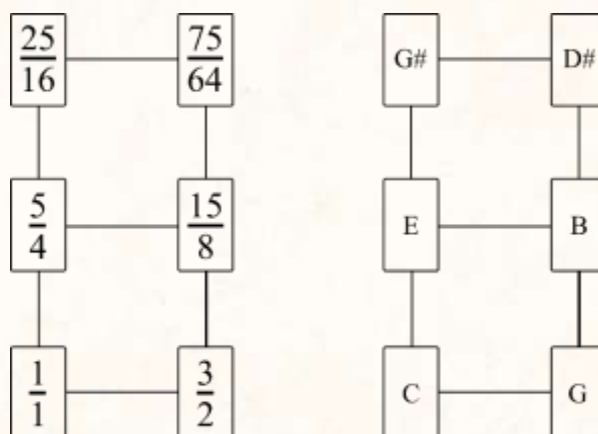
Genus XVIII. Exponent $2^m \cdot 3^3 \cdot 5^2$				
Pitch Names	Tones		Intervals	Interval Names
C	$2^7 \cdot 3$	384		
C#	$2^4 \cdot 5^2$	400	24:25	Minor semitone
D	$2^4 \cdot 3^3$	432	25:27	Major limma
D#	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	450	24:25	Minor semitone
E	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	480	15:16	Major semitone
F	2^6	512	15:16	Major semitone
F#	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$	540	128:135	Minor limma
G	$2^6 \cdot 3^2$	576	15:16	Major semitone
G#	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	600	24:25	Minor semitone
A	$2^7 \cdot 5$	640	15:16	Major semitone
B ^b	$3^3 \cdot 5^2$	675	128:135	Minor limma
B	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	720	15:16	Major semitone
c	$2^8 \cdot 3$	768	15:16	Major semitone

Fonte: Solomon (1960)

Adriaan Fokker (1887—1972), na sua publicação “Reflexões aritméticas sobre a música” (*Rekenkundige bespiegeling der muziek*) expandiu o *genus musicum* de Leonhard Euler ao expor esse em uma malha (Figura 5), concebendo sua utilização aproximada numa escala de 31 notas (Beer, 2022). Essa expansão também visou a utilização de primos maiores. Na expressão de Fokker, a inclusão do fator primo 7 exige que uma malha gerada, composta por quintas (3) e terças (5) após redução à oitava, seja expressa como um cubo que conecta pares de acordes (Figura 6). Cada fator acrescentado posteriormente acrescenta uma dimensão à

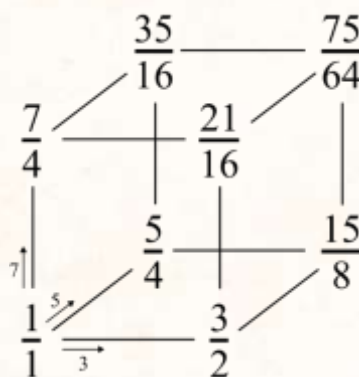
malha. Além disso, a representação do que, em um *genus* de Euler estaria posto como $2^m \cdot 3^1 \cdot 5^2$, pode ser colocado como (3, 5, 5) e (3, 5^2) (Fokker, 1975).

Figura 5. À esquerda, malha bidimensional construída a partir do *genus* (3,5,5), onde o eixo x representa o primo 3, e o eixo y, o primo 5. À direita, sua representação em notas da escala cromática.



Fonte: Autor

Figura 6. Malha construída a partir do *genus* (3, 5, 7), onde o eixo x representa o primo 3, o z o primo 5, e o y o primo 7



Fonte: Autor

Genera spectra

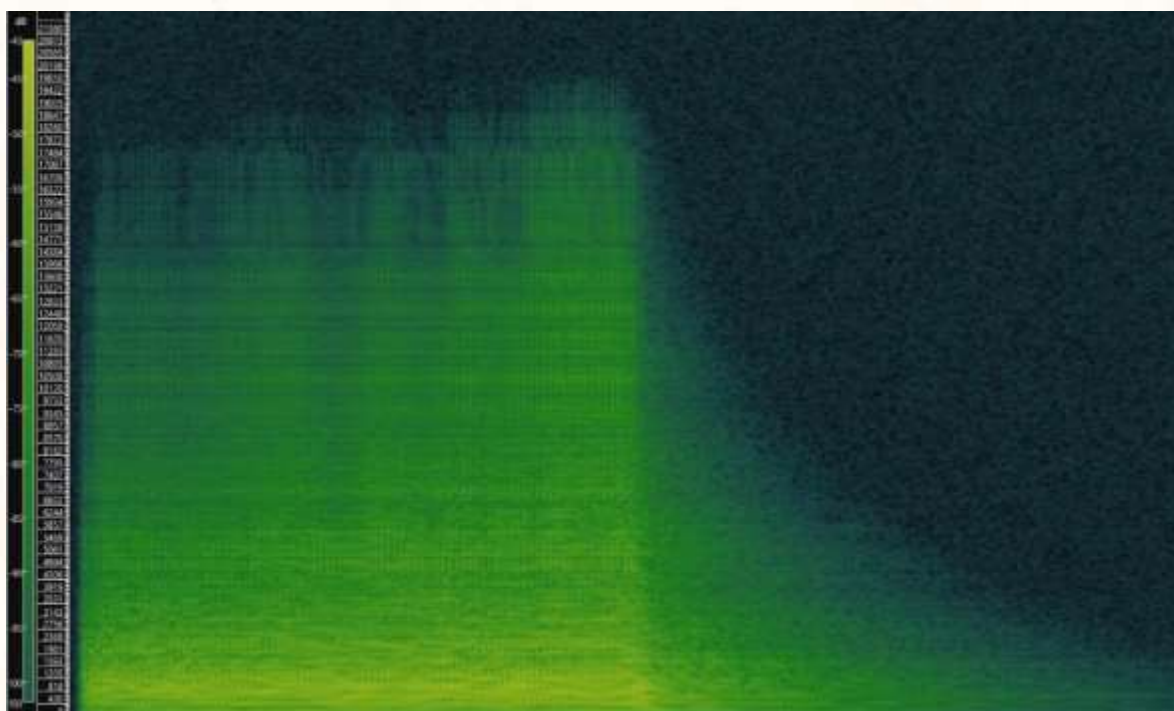
Aqui, propomos a utilização da análise espectral para gerar *genera* Euler-Fokker através da mensura de parciais a partir da intensidade. Nesse procedimento, o número (que chamaremos de “resolução”¹⁰) de parciais mais intensos será anotado, e a partir da repetição

¹⁰ Esse valor tem relação direta com o que Fokker chamou de “grau” de um *genus*, isso é, a quantidade de itens presentes dentro do *genus*. Um *genus* (3, 5, 5) seria, por exemplo, de grau 3, pois contém 3 itens. Um *genus* (3355) ou (3², 5²) teria grau 4 e assim por diante.

ou não de parciais e de seus respectivos fatores primos, exploraremos modos de gerar um *genus*. Aqui, chamaremos as escalas construídas a partir da extração de parciais de “*genera spectra*”.

Para demonstrar, utilizaremos uma amostra de som de um trombone baixo executando a nota E₁, realizada por um instrumento virtual, que foi analisada utilizando o software *Sonic Visualiser* (Figura 7).

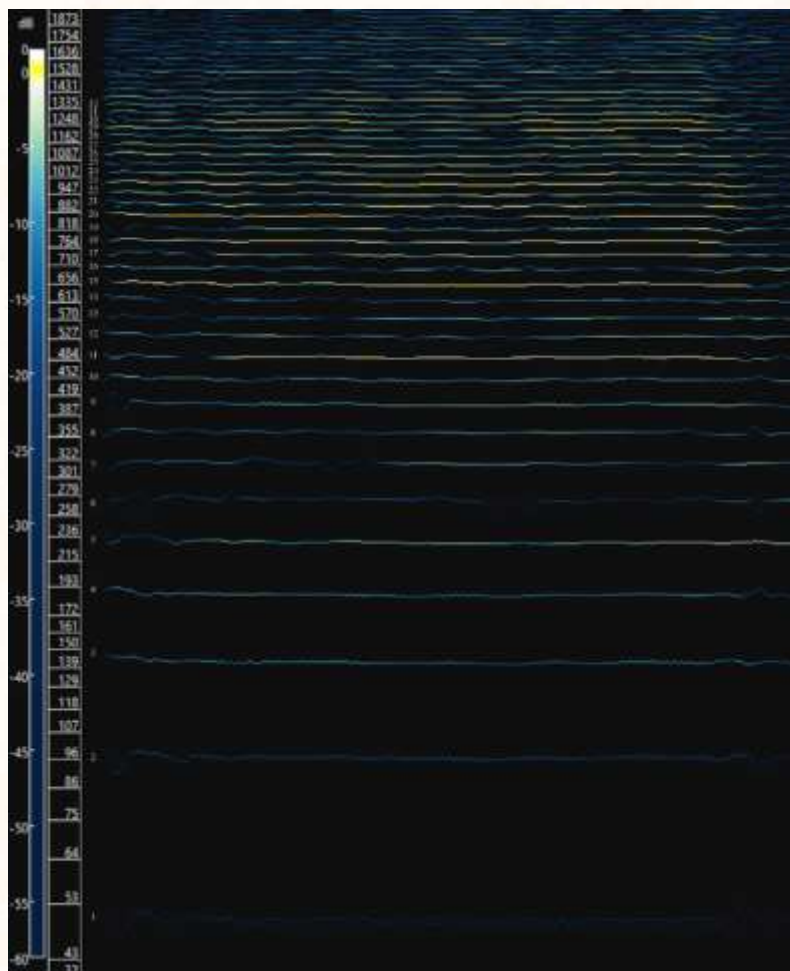
Figura 7. Espectrograma de um E₁ de um trombone baixo. O eixo vertical indica as frequências, com a cor indicando a potência de cada parcial. O eixo x indica o tempo.



Fonte: Autor

Após essa geração, focamos o espectro nos picos mais densos, utilizando a camada *Peak Spectrum* (espectro de picos) do programa, de modo a enfatizar os parciais harmônicos mais presentes num excerto de aproximadamente um segundo do áudio, gerando linhas mais visíveis. Também focamos na banda de frequências onde os parciais são naturalmente mais intensos na nossa gravação. No caso, 2.000 Hz para baixo. Desse recorte (aproximadamente 1 segundo de áudio, 0 – 2.000 Hz) foi extraído o material spectral que utilizaremos para construir nosso *genus*.

Figura 8. Espectro delimitado temporalmente em um segundo, mostrando somente as frequências até ~2.000 Hz. Ao lado das linhas representando os parciais, demarcamos os parciais harmônicos de 1 até 32.



Fonte: Autor

Posteriormente, manipulamos o *threshold* (limite mínimo) de intensidade para aparição dos parciais no espectro, a fim de expressar uma resolução: 4, ou seja, buscando os 4 parciais mais intensos do espectro. Após esse procedimento, obtemos o seguinte conjunto: $R_4 = (15, 18, 20, 23)$. Vale frisar que poderíamos escolher outras resoluções, como 8, que geraria $R_8 = (5, 11, 15, 18, 20, 23, 29, 30)$, porém, para o propósito desse texto, usaremos somente R_4 . Deste ponto em diante, iremos introduzir duas abordagens diferentes para lidarmos com esse conjunto na perspectiva do *genus* Euler-Fokker.

A primeira dessas trata da utilização dos fatores primos dos elementos constituintes de R_4 como fatores na geração do *genus*. Ou seja, tendo $R_4 = (15, 18, 20, 23)$, teríamos então que fatorar cada um dos componentes desse, gerando o *genus spectrum* R_{4A} (doravante GSR_{4A}) = $(3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 23)$ ou $GSR_{4A} = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23)$. Se generalizarmos o 2 no

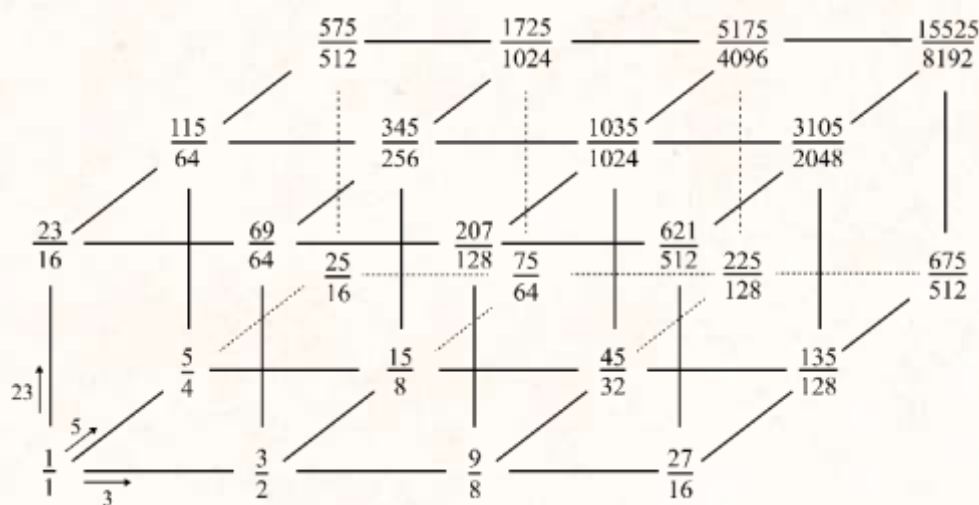
conjunto (devido à redundância de oitava), teremos então $GSR_{4A} = (3^3 \cdot 5^2 \cdot 23)$. O GSR_{4A} ¹¹ gerado por esse procedimento detêm grau 6, e contêm 24 notas (Figura 9). Além disso, devido à sua dimensionalidade de 3, pode ser expresso em uma malha tridimensional (Figura 10). Uma característica notável dessa escala, e de todas as que produziremos subsequentemente, é a presença do número primo 23, que caracteriza esse conjunto como limite-23.

Figura 9. Conjunto do GSR_{4A}

$\frac{1}{1}$	$\frac{1035}{1024}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{69}{64}$	$\frac{575}{512}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{621}{512}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5175}{4096}$	$\frac{675}{512}$	$\frac{345}{256}$
$\frac{45}{32}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3105}{2048}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{207}{128}$	$\frac{1725}{1024}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{115}{64}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15525}{8192}$

Fonte: Autor

Figura 10. Projeção tridimensional do GSR_{4A}



Fonte: Autor

A segunda, e a mais direta, é tratar os números dos harmônicos como os fatores de geração em si, ou seja, teremos o *genus spectrum* $GSR_{4B} = (15, 18, 20, 23)$, por exemplo. Ou seja, temos que as notas da escala serão fruto das multiplicações dos fatores de R_4 diretamente, sem nenhum tipo de fatoração, e ajustadas para oitava. Essa estipulação pode ser entendida como uma expansão da regra estrutural do *genus* Euler-Fokker, retirando a necessidade de se

¹¹ *Genus spectrum* de resolução 4-A.

lidar necessariamente com valores primos. A natureza “fatorável” de alguns dos elementos desse *genus* ($15 = 5 \times 3$, por exemplo), faz emergir certas proporções que são familiares a outros *genera* contendo 5 e 3, mas, devido ao seu grau limitado (4), a cardinalidade da escala resultante é reduzida de modo considerável. Além disso, o *genus* GSR_{4B} não pode ser expresso numa malha tridimensional devido à sua dimensionalidade (4).

Figura 11. Procedimento gerador do GSR_{4B} , mostrando os geradores, suas multiplicações, a potência necessária de 2 para ajuste de oitava, e a proporção final simplificada.

Geradores	Produto	Potência de 2 para ajuste de oitava	Proporção final
15	15	8	15:8
18	18	16	9:8
20	20	16	5:4
23	23	16	23:16
15×18	270	256	135:128
15×20	300	256	75:64
15×23	345	256	345:256
18×20	360	256	45:32
18×23	414	256	207:128
20×23	460	256	115:64
$15 \times 18 \times 20$	5400	4096	675:512
$15 \times 18 \times 23$	6210	4096	3105:2048
$15 \times 20 \times 23$	6900	4096	1725:1024
$18 \times 20 \times 23$	8280	4096	1035:1024
$15 \times 18 \times 20 \times 23$	124200	65536	15525:8192

Fonte: Autor

Figura 12. Conjunto completo do GSR_{4B}

$\frac{1}{1}$	$\frac{1035}{1024}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{675}{512}$	$\frac{345}{256}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{3105}{2048}$	$\frac{207}{128}$	$\frac{1725}{1024}$	$\frac{115}{64}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15525}{8192}$
---------------	---------------------	-------------------	---------------	-----------------	---------------	-------------------	-------------------	-----------------	-----------------	---------------------	-------------------	---------------------	------------------	----------------	----------------------

Fonte: Autor

Uma característica notável da relação entre os dois *genera*, é que o GSR_{4B} é um subconjunto de GSR_{4A} . Ambos mapeiam os parciais harmônicos de um som em diferentes graus de granularidade, mas não o suficiente para serem considerados de uma resolução diferente, o que afetaria drasticamente o número de proporções geradas. No GSR_{4B} também não temos a

presença da quinta justa 3: 2. Supomos que essa diferença na cardinalidade dessas escalas detém consequências na aplicação composicional desses recursos. O efeito da utilização de uma resolução mais alta (por exemplo, 8) no momento da geração de um *genus* também pode ter consequências que levem a dificuldades da utilização da escala sem a utilização de um software especializado como o Csound.

Considerações finais

Nesse texto, fizemos uma breve revisão da corrente e técnicas do espectralismo, com ênfase na análise espectral. Após isso, trouxemos alguns recursos de geração de escalas em entonação justa, na qual situamos também os *genera* Euler-Fokker. Após isso, propomos dois recursos para leitura dos dados extraídos de espectros sonoros, culminando em resultados relacionados, porém com cardinalidades e potenciais harmônicos diferentes.

Além das possibilidades supracitadas, prevemos a aplicação desse recurso em contextos analíticos e composicionais. Os *genera spectra* podem ser utilizados como ferramenta de modelagem, podendo servir para a análise de espectros de objetos sonoros sob o viés de seus *genera spectra* modelados. Resoluções maiores podem ser experimentadas, e transformações de malha harmônica podem ser aplicadas em projeções desses *genera* em contextos composicionais. Planejamentos composicionais podem ser elaborados sobre sistemas construídos a partir da concatenação de *genera spectra* modelados.

O uso do *genus* Euler-Fokker como ferramenta de acesso ao espectro harmônico também tem o potencial de viabilizar o encontro das discussões sobre harmonicidade e dissonância da microtonalidade com as discussões sobre harmonicidade no âmbito da música espectral. Esse encontro conceitual pode, então, viabilizar o cruzamento e expansão de conceitos, leituras de mundo e composição musical.

Referências

ANDERSON, Julian. Spectral music. In: SADIE, Stanley; TYRRELL, John (ed.). *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. 2. ed. London: Macmillan, 2001.

BARKER, Andrew (ed.). *Greek Musical Writings*. Volume II: Harmonic and Acoustic Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

BARLOW, Clarence. Two essays on theory. *Computer Music Journal*, Cambridge, MA: MIT Press, v. 11, n. 1, p. 44-60, 1987. Disponível em: <https://clarlow.org/wp-content/uploads/2025/07/barlow1987-two-essays-of-theory.pdf>. Acesso em: 17 jun. 2026.



BEER, Anton de. *The Development of 31-Tone Music*. Tradução para o inglês do artigo publicado originalmente em *Sonorum Speculum*, Amsterdam, 1965. Amsterdam: Huygens-Fokker Foundation, 2022. Disponível em: <https://huygens-fokker.org/wp-content/uploads/2024/09/The-Development-of-31-Tone-Music-by-Anton-de-Beer-H-F.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2026

CAGNEY, Liam. *Gérard Grisey and spectral music: composition in the information age*. Cambridge: Cambridge University Press, 2024.

FINEBERG, Joshua. Guide to the basic concepts and techniques of spectral music. *Contemporary Music Review*, v. 19, n. 2, p. 81-113, 2000.

FOKKER, Adriaan D. *New music with 31 notes*. Tradução: Leigh Gardine. Bonn-Bad Godesberg: Verlag für systematische Musikwissenschaft, 1975.

GANN, Kyle. *The arithmetic of listening: tuning theory and history for the impractical musician*. Urbana: University of Illinois Press, 2019.

PARTCH, Harry. *Genesis of a music: an account of a creative work, its roots and its fulfillments*. 2. ed. New York: Da Capo Press, 1974.

PTOLEMEU. *Harmonics: translation and commentary*. Tradução e comentário: Jon Solomon. Leiden; Boston; Köln: Brill, 2000. (Mnemosyne. Bibliotheca Classica Batava. Supplementum, 203).

PUCKETTE, Miller. *The Theory and Technique of Electronic Music*. Singapore: World Scientific, 2007.

ROSE, François. Introduction to the pitch organization of French spectral music. *Perspectives of New Music*, v. 34, n. 2, p. 6-39, 1996.

SETHARES, William A. *Tuning, timbre, spectrum, scale*. 2. ed. London: Springer-Verlag London, 2005.

SMITH, Charles Samuel. *Leonhard Euler's Tentamen novae theoriae musicae: a translation and commentary*. 1960. Tese (Doutorado) – Graduate School, Indiana University, Bloomington, 1960.

TENNEY, James. On "Crystal Growth" in Harmonic Space (1993/2003). In: POLANSKY, Larry; PRATT, Lauren; TENNEY, James (org.). *From Scratch: Writings in Music Theory*. Urbana: University of Illinois Press, 2017. p. 383–393.

TEODORESCU-CIOCANEA, Livia. Timbre versus spectralism. *Contemporary Music Review*, v. 22, n. 1/2, p. 87-104, 2003.

