Construção de escalas utilizando o Método dos Crivos de Xenakis

Henrique Iwao, Jônatas Manzolli
NICS (Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora) – UNICAMP
Departamento de Música, IA
e-mail: {iwao, jonatas}@nics.unicamp.br
web: www.nics.unicamp.br

Sumário:
A partir do estudo do capítulo 11 do livro "Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition" de Iannis Xenakis, utilizou-se o método dos crivos para construir escalas musicais cuja estrutura não estivesse circunscrita à oitava (chamadas neste artigo de "escalas não-oitavantes"). Dois tipos de escalas foram construídas: escalas não-oitavantes, utilizando afinações de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de tom, com períodos não divisores do intervalo de 12 semitons; escalas com simetrias simples, mas com afinações que não possibilitam a ocorrência de intervalos de oitava. O texto introduz o método de Xenakis e discute as implicações dos Crivos como meio de construção de novas escalas.

Palavras-Chave: crivo, escalas não-oitavantes, Xenakis, afinações alternativas.

1. Introdução

O interesse pela música de Iannis Xenakis e seus métodos de composição leva muitos músicos, especialmente compositores, a estudarem o livro "*Formalized Music: thought and mathematics in composition*" (Xenakis, 1992). Visto que esta obra é densa e multifacetada, mostram-se necessários estudos que ampliem o alcance das práticas e das idéias propostas e realizadas por Xenakis.

O Método dos Crivos de Xenakis, descrito no capítulo 11 do livro acima mencionado, é uma ferramenta para a construção e análise de escalas musicais. A idéia principal de tal método é que é possível formalizar a estrutura de uma escala através de uma lógica de construção, ou seja, dada uma determinada simetria, podemos representar uma escala musical por um *Crivo*. Os Crivos são construídos através de operações elementares entre conjuntos. As escalas associadas aos Crivos não precisam, necessariamente, ter simetrias subordinadas ao intervalo de uma oitava. O aspecto inovador desta abordagem é que não é necessário construir-se escalas associadas a notas que funcionam como classes de equivalência a cada oitava. Definindo escalas através de suas simetrias, podemos nos aprofundar em outras possibilidades de construção e, inclusive, ampliar a compreensão de escalas com simetrias subordinadas ao intervalo de oitava. A partir desta generalização advinda do método dos crivos utilizado por Xenakis, torna-se mais evidente a possibilidade de utilização de escalas com tipologias diversas.

O enfoque dado neste artigo é construir escalas denominadas "não-oitavantes" a partir do método dos crivos utilizado por Xenakis. Na seção 2 apresentamos o modelo dos crivos de Xenakis e definimos os termos "escala não-oitavante" e "unidade de medida não-oitavante". Na seção 3 discutimos alguns resultados da pesquisa em andamento e apresentamos quatro exemplos de escalas, cada uma delas com características específicas. Na seção 4 concluímos esse artigo e apresentamos alguns pontos relevantes no contexto de estudos futuros.

2. O Método dos Crivos de Xenakis

Podemos representar, construir e analisar uma escala utilizando o Método dos Crivos. Esse método se ocupa de processos de filtragem numérica, ou seja: *queremos selecionar alguns números,* *todos eles pertencentes ao conjunto dos números inteiros, Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}, de modo a criar uma seqüência numérica com certa simetria e lógica interna*.

2.1 Relação entre Crivos e Escala

Definindo uma *unidade de medida intervalar* ***u*** e *uma nota inicial* ***i***, construiremos escalas cujos elementos são notas geradas através de *intervalos* que, em relação à nota inicial, são múltiplos inteiros da unidade de medida ***u***. Esses intervalos, por sua vez, definem uma relação biunívoca entre os elementos de um Crivo e de uma Escala, i.e. *é possível associar a cada crivo uma única escala*. A um intervalo ascendente de ***a*** unidades de medida em relação à nota inicial ***i***, corresponde um único número positivo ***a*** do Crivo equivalente à Escala; e dado um número negativo ***b*** pertencente a um Crivo, corresponde um intervalo descendente na Escala, com o valor de ***b*** unidades de medida em relação à nota inicial ***i***.

Utilizando-se de classes residuais, isto é, conjuntos cujos elementos são múltiplos inteiros de um módulo *M* (cujo valor numérico é *m*), somados com um resíduo *R* (cujo valor numérico é *r*)[1] e operações de união, intersecção, diferença simétrica (a união de dois conjuntos menos a intersecção deles) e complementação de classes residuais, construímos nossos crivos. Denotamos uma classe residual ***K*** da seguinte forma: ***K*** = (***Mm***, ***Rr***), onde ***M*** é o módulo de valor numérico ***m*** e ***R*** é o resíduo de valor numérico ***r***.

Os Crivos são gerados por operações elementares de conjuntos (vide Halmes, 1970) aplicadas sobre as classes residuais. Para duas classes residuais K_1 e K_2, utilizaremos:

a) União denotada por $K_1 \cup K_2$; *b) Intersecção* denotada por $K_1 \cap K_2$; c) *Diferença Simétrica* denotada por $K_1 \wedge K_2$; d) *Complementação de* K_1 denotada por K_1^C. Parênteses indicam qual a ordem e abrangência de execução das operações entre as classes residuais. Operações entre classes residuais dentro de um parêntese devem ter prioridade na ordem de aplicação; após isso o conteúdo resultante dentro do parêntese deve ser tratado como um conjunto, sujeito a outras operações (da mesma forma que as classes residuais).

A *Escala de Tons Inteiros,* por exemplo, para $u = \frac{1}{2}$ tom, pode ser descrita pelo Crivo *T* = (*M*2, *R*0)[2] = {..., -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}, verifica-se que neste caso cada elemento do crivo tem duas unidades de medida (i.e. 2 semitons) em relação ao outro. Definindo a nota inicial dessa escala como, nota inicial = C3, temos a correspondência *T* = {..., C2, D2, E2, F#2, G#2, A#2, C3, D3, E3, F#3, G#3, A#3, C4, ...}.

2.2 Período e Unidades de Medida

O período de uma escala é a periodicidade de seu Crivo e, portanto, de sua estrutura. Ele é definido como o *Mínimo Múltiplo Comum* entre os módulos das classes residuais que compõem o Crivo, quando esse é descrito apenas por uniões de classes residuais (o que é chamado de "*forma maximamente simples do Crivo*"). Escalas cujos períodos são divisores do intervalo de 12 semitons, obtendo como resultado um número inteiro positivo, são chamadas "*escalas oitavantes*". Todas as outras escalas são chamadas de "*escalas não-oitavantes*". Para ***u*** = $\frac{1}{2}$ tom, são oitavantes as escalas

---

[1] Associa-se a esta definição a operação de divisão inteira entre dois números, ou seja, dado dois números inteiros *X* e *Y*, com $X \geq Y$, é possível escrever $X = m \times Y + r$, onde *R* = *r* é o resto da divisão inteira e *M* = *m* é um número inteiro.

[2] Onde lê-se, que o valor do módulo *M* é 2 e o resíduo *R* é Zero.

com período 1, 2, 3, 4, 6 e 12, o que inclui, por exemplo, todas as escalas maiores e menores da música tonal e as Escalas dos Modos de Transposição Limitada (Messiaen, 1986).

Dizemos também que, se a unidade de medida ***u*** divide o intervalo de 12 semitons, obtendo como resultado um número inteiro positivo, ela é uma "*unidade de medida oitavante*". Caso contrário ela é dita "*unidade de medida não-oitavante*". Unidades de medidas não oitavantes geram sempre escalas não oitavantes.

2.3 Margem de Segurança

Utilizamos um coeficiente de segurança c_s para garantirmos a construção de escalas com intervalos não muito próximos de uma oitava, evitando assim que uma unidade de medida não-oitavante se assemelhe a uma unidade de medida oitavante.

Seja ***u*** a unidade de medida intervalar utilizada. Para que ***u*** possa ser dita unidade de medida não-oitavante com coeficiente c_s, não deve existir nenhum número natural ***n*** (***n*** pertencente a N = {1, 2, ...}), tal que, para c_s o coeficiente da margem de segurança, $u \times n \in \left(12\ semitons - c_s, 12\ semitons + c_s\right)$, isto é, nenhum múltiplo de ***u*** pertença ao intervalo da margem de segurança.

3. Resultados: Escalas Não-Oitavantes

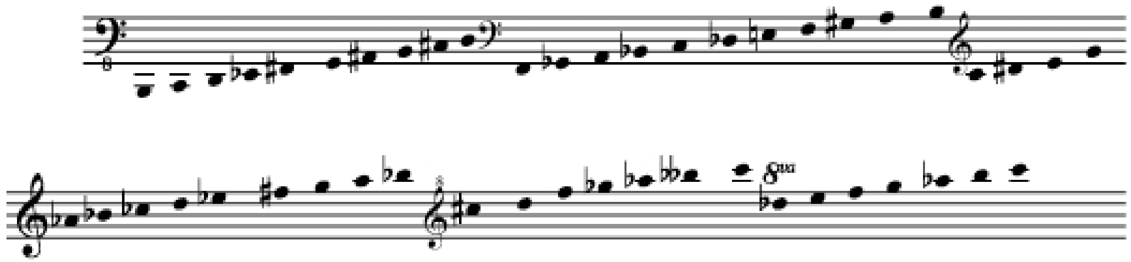
Um Crivo filtra um conjunto contendo todos elementos possíveis (todos os números inteiros) para produzir uma seqüência numérica infinita. Para fins práticos, definimos um âmbito finito para o Crivo. No caso da construção de escalas, esse âmbito garante a utilização de notas cujas alturas estão dentro das nossas possibilidades auditivas.

Nos 4 exemplos a seguir padronizamos o âmbito = (A-1, C7) e uma nota inicial = C3, além de um coeficiente de confiança $c_s = \frac{1}{16}$ tom. Os exemplos sonoros podem ser todos encontrados na página www.nics.unicamp.br/~iwao/anppom. Os gráficos das escalas H1, H3 e H4 apresentam os intervalos, em relação à nota inicial, dos elementos dos dois primeiros períodos dessas escalas. O gráfico da escala H2, que tem um período imenso, apresenta os intervalos dos elementos pertencentes ao intervalo = (C3, C7).

Os exemplos se dividem basicamente em duas categorias: i) escalas não-oitavantes, utilizando afinações de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de tom, com períodos não divisores do intervalo de 12 semitons; (escalas H1 e H2); ii) escalas com simetrias simples, mas com afinação que não possibilita a ocorrência de intervalos de oitava (escalas H3 e H4).

Exemplo 1: Escala H1

Período: 11.
Crivo: $(M11, R0) \cup (M11, R3) \cup (M11, R4) \cup (M11, R7) \cup (M11, R8) \cup (M11, R10)$.
Unidade de medida = $\frac{1}{2}$ tom.



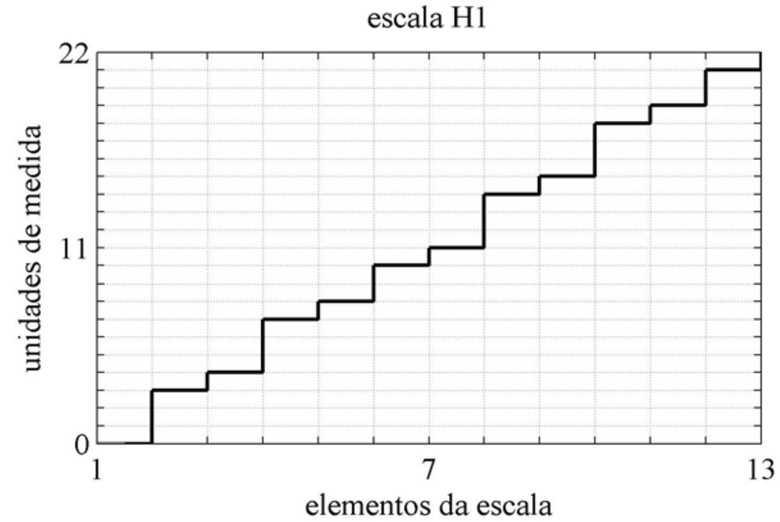


Figura 1: Escala H1 apresentada na forma de partitura (acima) e gráfico (abaixo).

Exemplo 2: Escala H2

Período: maior que 1000000.
Crivo: $((M7, R0) \cup (M10, R9) \cup (M11, R3))\wedge((M3, R2) \cap ((M15, R5) \cup (M18, R8))^{C})$.
Unidade de medida = $\frac{1}{4}$ tom.

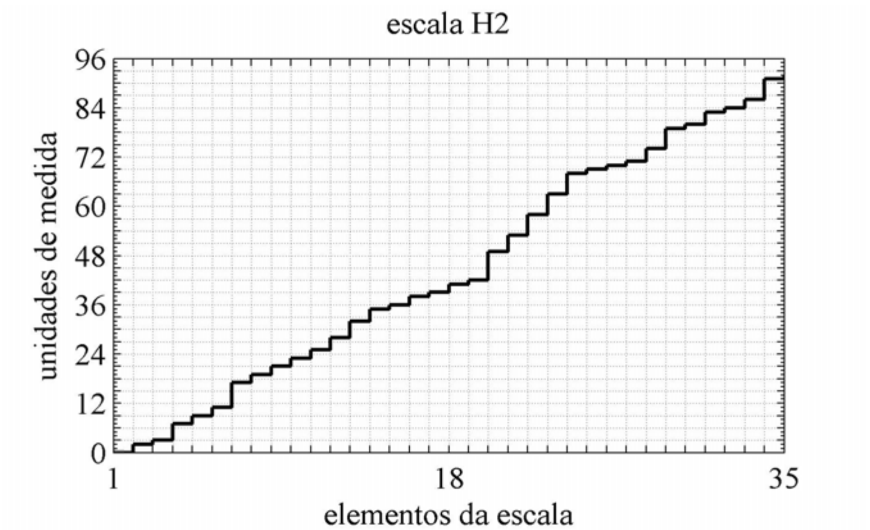


Figura 2: Escala H2 apresentada na forma de partitura (acima) e gráfico (abaixo).

Exemplo 3: Escala H3

Período: 3.
Crivo: $(M3, R1)^C$ ou $(M3, R0) \cup (M3, R2)$.
Unidade de medida = $\frac{5}{13}$ tom.

Observação: para $u = \frac{1}{2}$ tom é conhecida como Escala do Modo de Transposições Limitadas 2 (terceira transposição), como definida por Messiaen (1986).

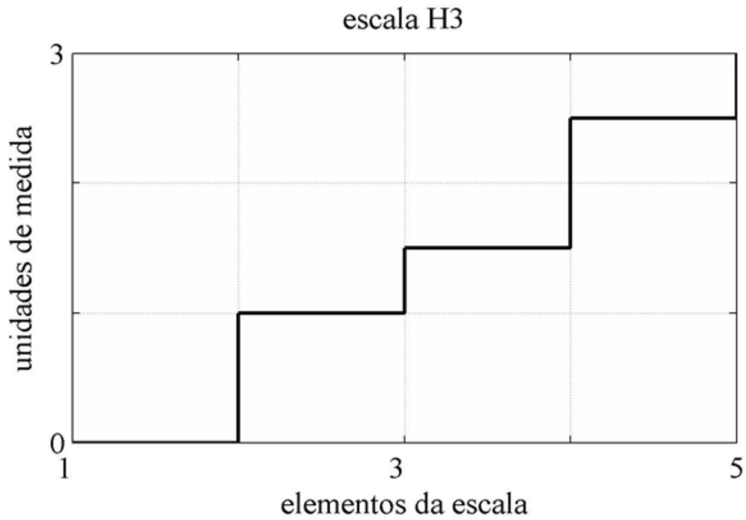


Figura 3: Escala H3 apresentada na forma de gráfico.

Exemplo 4: Escala H4

Período: 6.

Crivo: $((M6, R4) \cup (M6, R5))^C$ ou $(M3, R0) \cup (M6, R1) \cup (M6, R2)$.
Unidade de medida = $\frac{5}{19}$ tom.

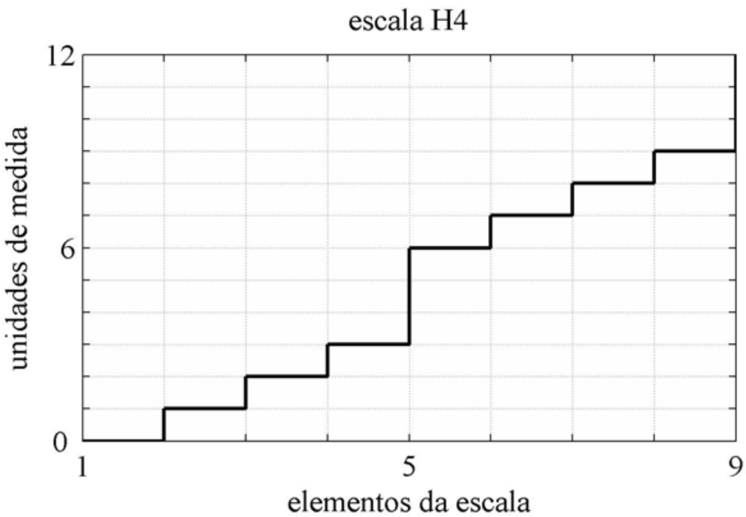


Figura 4: Escala H4 apresentada na forma de gráfico.

Nome da escala	*Tipo*	*Unidade de Medida*	*Simetria*	*Período*
Escala H1	Não-oitavante	Oitavante	Mediana	Mediano
Escala H2	Não-oitavante	Oitavante	Complexa	Imenso
Escala H3	Não-oitavante	Não-oitavante com coeficiente $\frac{1}{16}$ tom	Simples	Pequeno
Escala H4	Não-oitavante	Não-oitavante	Simples	Pequeno

Tabela 1: comparação dos parâmetros associados às quatro escalas apresentadas no artigo.

4. Discussão

A partir do conceito de que uma escala é uma estrutura com: a) *simetria interna* - relações entre as classes residuais que compõem seu Crivo e b) *simetria externa* - período da escala, pudemos ampliar as possibilidades de construção de escalas musicais, inclusive construindo escalas não-oitavantes. A definição da oitava como unidade de medida fixa para construção de escalas nos leva a concepção de que uma nota é sempre um elemento circunscrito a mesma e, por extensão, as notas estão refletidas de forma equivalente em outras oitavas. O método utilizado por Xenakis nos leva a uma ampliação de tal definição, ou seja, a formalização proporcionada pelos Crivos permite encarar as escalas oitavantes e as escalas não-oitavantes como duas possibilidades de um mesmo processo. Em uma composição, podemos transitar entre esses dois tipos de simetria de diversas maneiras, de modo a, por exemplo, contrastar registros regulares e não regulares dos instrumentos, ampliando, construindo e transformando a afinação como Xenakis fez na peça *Plèiades* (1979), para sexteto de percussão. Podemos também explorar diferentes tipos de escalas não-oitavantes, evidenciando suas divergências e convergências musicais e estruturais.

5. Conclusão

Neste artigo apresentamos o Método dos Crivos de Xenakis como ferramenta para formalizar a construção e análise de escalas musicais e definimos os termos "escalas não-oitavantes" e "unidades de medida não-oitavantes". Mostramos 4 exemplos de escalas cuja lógica de construção não se submete ao intervalo da oitava. Por fim, discutimos brevemente sobre algumas implicações das escalas não-oitavantes. Salientamos que o Método dos Crivos de Xenakis é uma importante ferramenta composicional que, por formalizar a construção e análise de escalas, permite a concepção de escalas musicais as mais variadas possíveis. Estas podem ser utilizadas, por exemplo, no plano composicional de uma obra musical ou como ponto de partida para uma improvisação. Tópicos para pesquisa futura incluem:

i) aprofundamento na utilização analítica das ferramentas abordadas;

ii) estudo de unidades de medidas intervalares variáveis, isto é, **u** como função de uma variável **t**, $u = f(t)$.

iii) utilização do método para a determinação de outras relações musicais que não as entre elementos de escalas musicais (no campo das alturas), como, por exemplo, relações rítmicas, escalas de intensidades e graus de densidades.

6. Agradecimentos

Esse artigo foi escrito a partir da iniciação científica financiada pela FAPESP processo de número 05/54392-0. A pesquisa está vinculada também ao projeto de produtividade de pesquisa do CNPq, 308765/2003-6.

7. Referências

Halmes, P. R (1970). *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono.

Messiaen, O. (1986). *Technique de mom Langage Musical vol 1 & 2*. Paris: Aphonse Leduc, Éditions Musicales.

Xenakis, I. (1992). *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition*. New York: Pendragon Press.